

Interpolazione di Newton e Lagrange

Pierluigi Magli - Wenchang Chu

Dipartimento di Matematica "E. De Giorgi" - Università di Lecce
pierluigi.magli@libero.it, chu.wenchang@unile.it

Sommario

È ben noto che le interpolazioni di Newton e di Lagrange degli stessi punti di una funzione assegnata, rappresentano lo stesso polinomio. Viene qui presentata una dimostrazione elementare e diretta che fa uso del calcolo combinatorio.

Sia $f(x)$ una funzione complessa ed $\{x_k\}_{k=0}^n$ un insieme di punti distinti (detti *nodi*) sui quali essa è assegnata; i *polinomi d'interpolazione di Newton e Lagrange* della funzione $f(x)$ sono rispettivamente definiti da

$$N_n(x; f) = \sum_{k=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] \prod_{\iota=0}^{k-1} (x - x_\iota) \quad (1)$$

$$L_n(x; f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \quad (2)$$

dove

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k (x_j - x_i)} \quad (3)$$

è l'espressione esplicita per la differenza divisa di ordine k .

Sappiamo che $\mathbf{N}_n(\mathbf{x}; \mathbf{f}) = \mathbf{L}_n(\mathbf{x}; \mathbf{f})$. Per quanto risulta agli autori, tutte le dimostrazioni pubblicate su periodici e testi di analisi numerica di questo semplice ma importante risultato, sono basate sul principio di induzione. È immediato verificare la proprietà interpolante per il polinomio di Lagrange, si ha cioè $L_n(x_k; f) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$, ma risulta necessario l'utilizzo dell'induzione per provare che la stessa vale anche per il polinomio di Newton, ossia $N_n(x_k; f) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Ricordando ora un risultato algebrico che due qualsiasi polinomi di grado $\leq n$, i quali coincidono su $n+1$ punti distinti, sono identici dappertutto, si ottiene subito l'uguaglianza $\mathbf{N}_n(\mathbf{x}; \mathbf{f}) = \mathbf{L}_n(\mathbf{x}; \mathbf{f})$.

Viene qui presentata una dimostrazione alternativa basata sul calcolo combinatorio, la quale è abbastanza semplice da essere compresa anche da studenti di scuole superiori.

Infatti, sostituendo la differenza divisa nel membro destro di Eq (1) con l'espressione in Eq (3), si ottiene

$$N_n(x; f) = \sum_{k=0}^n \prod_{\iota=0}^{k-1} (x - x_\iota) \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k (x_j - x_i)}.$$

Scambiando l'ordine delle sommatorie, l'espressione può essere riformulata come segue

$$N_n(x; f) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \sum_{k=j}^n \frac{x - x_j}{x - x_k} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i}. \quad (4)$$

Definiamo a questo punto

$$T_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

e osserviamo che valgono

$$T_k - T_{k-1} = \frac{x - x_j}{x - x_k} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i}. \quad (5)$$

Pertanto la somma interna di Eq (4) può scriversi

$$T_j + \sum_{k=j+1}^n \{T_k - T_{k-1}\} = T_n = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

Sostituendo nell'Eq (4) si ottiene l'interpolazione di Lagrange esplicitata nell'Eq (2).

Gli autori si augurano che questo approccio possa prendere luogo nei testi che trattano l'argomento.